Γ' τάξη Γενικού Λυκείου: Διαγώνισμα Φυσικής Κατεύθυνσης-Απαντήσεις

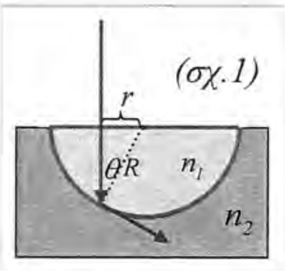
Θέμα Α: 1-γ, 2-γ, 3-δ, 4-α, 5(α-Λ, β-Λ, γ-Σ, δ-Λ, ε-Σ)

Θέμα Β:

Β.1 $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_1+\vec{\upsilon}_2 \Rightarrow \upsilon=|\upsilon_1\pm\upsilon_2| \Rightarrow \upsilon^2=\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+2\upsilon_1\upsilon_2 \Rightarrow$

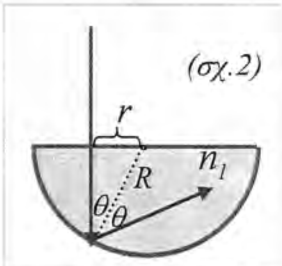
$\frac{2K}{m}=\frac{2K_1}{m}+\frac{2K_2}{m}\pm 2\sqrt{\frac{2K_1}{m}}\sqrt{\frac{2K_2}{m}} \Rightarrow K=K_1+K_2+2\sqrt{K_1K_2} \Rightarrow K=(0,41\pm 0,40)J$ ή

$\boxed{K=40J}$ ή $\boxed{K=0,01J}$ άρα <u>σωστή η πρόταση</u> (γ).



Β.2 Από το σχήμα(1) $n_1\eta\mu\theta=n_2\eta\mu 90 \Rightarrow \eta\mu\theta=\frac{n_2}{n_1}$ (1)

Στο σχήμα (2) η κρίσιμη γωνία μεταξύ ημισφαιρίου και αέρα είναι $n_1\eta\mu\theta_{crit}=n_\alpha\eta\mu 90 \xrightarrow{n_\alpha\cong 1} \eta\mu\theta_{crit}=\frac{1}{n_1}$ (2).



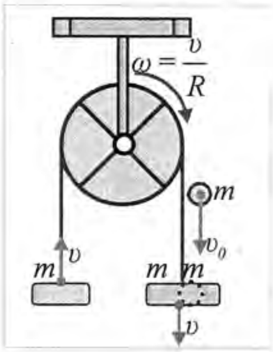
Η γωνία όμως πρόσπτωσης στην σφαιρική επιφάνεια στο σχήμα (2) είναι θ, όση και στο σχήμα (1)...

Από (1) και (2) παίρνουμε...

$\frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta_{crit}}=\frac{n_2/n_1}{1/n_1} \Rightarrow \frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta_{crit}}=n_2>1 \Rightarrow \eta\mu\theta>\eta\mu\theta_{crit}$

$\xrightarrow{\text{γωνίες οξείες}} \boxed{\theta>\theta_{crit}}$ ...άρα ολική ανάκλαση

<u>Σωστή η πρόταση</u> (γ)



Β.3 Διατήρηση στροφορμής $m\upsilon_0R=2m\upsilon R+m\upsilon R+I\omega$

$m\upsilon_0R=2m\upsilon R+m\upsilon R+\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon}{R} \xrightarrow{M=2m} \upsilon=\frac{\upsilon_0}{4}$

$K_0=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=0,5m\upsilon_0^2$

$K=\frac{1}{2}2m\upsilon^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow ...\ K=2m\upsilon^2$

$\frac{K}{K_0}=\frac{2m\upsilon^2}{0,5m\upsilon_0^2}=4\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^2 \xrightarrow{\upsilon=\upsilon_0/4} \frac{K}{K_0}=0,25 \Rightarrow \boxed{K=0,25K_0}$

<u>Σωστή η πρόταση</u> (β)

Θέμα Γ:

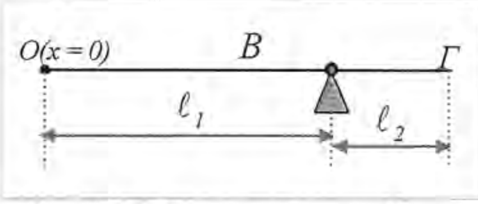
$s=4A=0,4m \Rightarrow A=0,1m$, $(OM)=\lambda=0,2m$, $\upsilon_M=\upsilon_{max}=\omega A \Rightarrow 2\pi=\omega 0,1 \Rightarrow$

$\omega=20\pi rad/s \Rightarrow f=10Hz$ και $\upsilon=\lambda f \Rightarrow \upsilon=2m/s$

Α) $\boxed{y_{\sigma\tau}(x,t)=0,2\sigma\upsilon\nu(10\pi x)\eta\mu(20\pi t)}$ (S.I).

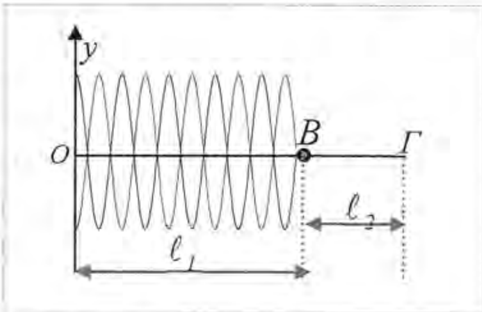
Β) Για την 1ης κοιλία έχουμε: $y_O(t)=0,2\eta\mu(20\pi t)$ και $\upsilon_O(t)=4\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi t) \xrightarrow{t=t_1}$

$\pm 3;2\pi = 4\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi t_1) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(20\pi t_1) = \pm 0,8$ και $\eta\mu(20\pi t_1) = \pm 0,6 \xrightarrow{y_o(t_1)>0}$ $\eta\mu(20\pi t_1) = +0,6$. Για το σημείο Ν έχουμε $y_N(t) = 0,15\eta\mu(20\pi t + \pi) \Rightarrow$ $y_N(t) = -0,15\eta\mu(20\pi t)$ (...είναι σε επόμενη άτρακτο μετά την 1η κοιλία και έχει διαφορά φάσης π)... $y_N(t_1) = -0,15\eta\mu(20\pi t_1) \Rightarrow \boxed{y_N = -0,09m}$



Γ) Στο Β έχουμε δεσμό, άρα $\ell_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \ell_1 = (2k+1)\frac{0,2}{4} \Rightarrow$ $2k+1 = 20\ell_1$

Η ποσότητα όμως $2k+1 = 20\ell_1$ πρέπει να είναι <u>ακέραιος περιττός</u> αριθμός και αυτό πληρούται μόνο από το $\ell_1 = 0,95m$ ... $2k+1 = 20.0,95 = 19 \Rightarrow k = 9$



άρα $\boxed{\ell_1 = 0,95m}$ και σχηματίζονται δέκα δεσμοί και δέκα κοιλίες

(Το k παίρνει τιμές 0,1,2,3...,9 δηλαδή δέκα τιμές ... σε αυτή τη μορφή του στάσιμου με κοιλία στην αρχή και δεσμό στη άλλη άκρη έχουμε ίσο αριθμό δεσμών και κοιλιών).

Δ) Τώρα θα έχουμε δεσμούς στα σημεία Ο και Β και για γίνεται αυτό πρέπει να ισχύει $\ell_1 = N\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \ell_1 = N\frac{\upsilon}{2f'} \Rightarrow f' = N\frac{\upsilon}{2\ell_1}$ με $N \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow f' = N\frac{2}{2.0,95} \Rightarrow$

$f' = N\frac{20}{19}Hz$. Για αυτές τις συχνότητες έχουμε στάσιμα στην (ΟΒ).

Η μεταβολή της συχνότητας από την προηγούμενη είναι $\Delta f = f' - f = N\frac{20}{19} - 10$.

Για να βρούμε την Δf_{min} πρέπει να υπολογίσουμε την κατάλληλη τιμή του N

Αν $f' > f$, πρέπει $\Delta f = N\frac{20}{19} - 10 \geq 0 \Rightarrow N \geq 9,5$ και επειδή $N \in \mathbb{Z}^+$, $N_{min} = 10$,

οπότε $\Delta f_{min} = 10\frac{20}{19} - 10 \Rightarrow \Delta f_{min} = +\frac{10}{19}Hz$

Αν $f' < f$, πρέπει $\Delta f = N\frac{20}{19} - 10 \leq 0 \Rightarrow N \leq 9,5$ και επειδή $N \in \mathbb{Z}^+$, $N_{max} = 9$,

οπότε $\Delta f_{min} = 9\frac{20}{19} - 10 \Rightarrow \Delta f_{min} = -\frac{10}{19}Hz$ άρα $\boxed{\Delta f_{min} = \pm\frac{10}{19}Hz}$

<u>Σχόλιο:</u> Για $N = 10$ σχηματίζονται 10 «άτρακτοι» στο τμήμα ΟΒ, 10 κοιλίες και 11 δεσμοί.

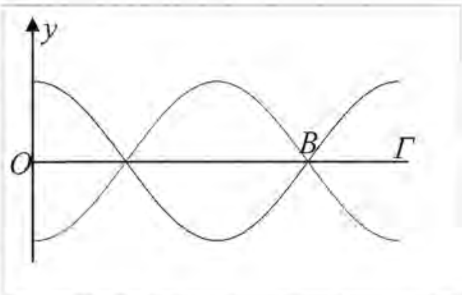
Ε.1) Οι συχνότητες για να έχουμε στάσιμα κύματα στο ΟΒ είναι $\ell_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \ell_1 = (2k+1)\frac{\upsilon}{4f_1} \Rightarrow f_1 = (2k+1)\frac{\upsilon}{4\ell_1} \Rightarrow f_1 = (2k+1)\frac{2}{4.0,95} \Rightarrow$

$f_1 = (2k+1)\frac{10}{19}$ ...άρα στάσιμα κύματα έχουμε για $f_{01} = \frac{10}{19}Hz$ και όλα τα ακέραια περιττά πολλαπλάσια αυτής... δηλαδή για $\frac{10}{19}Hz, \frac{30}{19}Hz, \frac{50}{19}Hz, \frac{70}{19}Hz, \frac{90}{19}Hz \ldots (2k+1)\frac{10}{19}Hz$.

Οι συχνότητες για να έχουμε στάσιμα κύματα στο ΒΓ είναι $\ell_2 = (2k+1)\frac{\lambda'}{4} \Rightarrow \ell_2 = (2k+1)\frac{\upsilon}{4f_2} \Rightarrow f_2 = (2k+1)\frac{\upsilon}{4\ell_2} \Rightarrow f_2 = (2k+1)\frac{2}{4.(0,95/3)}$

$\Rightarrow f_2 = (2k+1)\frac{30}{19}$ ...άρα στάσιμα κύματα έχουμε για $f_{02} = \frac{30}{19}Hz$ και όλα τα ακέραια περιττά πολλαπλάσια αυτής... δηλαδή για $\frac{30}{19}Hz$, $\frac{90}{19}Hz \ldots$ $(2k+1)\frac{30}{19}Hz$. Παρατηρούμε ότι ή ελάχιστη κοινή συχνότητα για να έχουμε στάσιμα κύματα στα δύο τμήματα της χορδής είναι $\boxed{f_0 = \frac{30}{19}Hz}$

Ε.2) Η παραπάνω συχνότητα στο τμήμα ΟΒ είναι η δεύτερη αρμονική κ=1 ...άρα δύο δεσμοί και δύο κοιλίες (... ο ένας δεσμός στο Β) ενώ για το τμήμα ΒΓ είναι η πρώτη αρμονική κ=0 ...ένας δεσμός στο Β και μια κοιλία.



Συνολικά **δύο δεσμοί** (ένας είναι κοινός στο Β) και **τρεις κοιλίες**.

Ε.3)Παρατηρούμε ότι η επόμενη κοινή συχνότητα είναι

$\boxed{f = \frac{90}{19}Hz}$

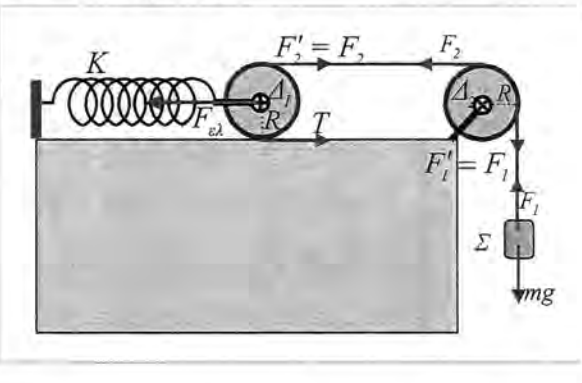
(5^{η} αρμονική και 2^{η} αρμονική αντίστοιχα για τα τμήματα ΟΒ και ΒΓ).

Θέμα Δ:

Α) Ισορροπία σώματος $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow F_1 - mg = 0 \Rightarrow F_1 = mg$

Ισορροπία τροχαλίας $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow$
$F_1R - F_2R = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$

Ισορροπία δίσκου $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow$
$F_2R - TR = 0 \Rightarrow F_2 = T$ και $\Sigma Fx = 0$
$\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = F_2 + T$.



Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$F_2 = T = mg$ και $F_{\varepsilon\lambda} = 2mg$

$F_{\varepsilon\lambda} = 2mg \Rightarrow K\Delta\ell_0 = 2mg \Rightarrow$

$\Delta\ell_0 = \frac{2mg}{K} \Rightarrow \boxed{\Delta\ell_0 = 0,125m}$

$T \le \mu N = \mu M_1 g \Rightarrow mg \le \mu M_1 g \Rightarrow \mu \ge \frac{M_1}{m} \Rightarrow \boxed{\mu \ge 0,625}$

B) $\upsilon_\Sigma = \upsilon_{\gamma\rho,\tau\rho o\chi\alpha\lambda i\alpha\varsigma} = \omega R \Rightarrow \boxed{a = Ra_{2,\gamma\omega\nu}}$ και $\upsilon_\Sigma = \upsilon_{\gamma\rho,\delta i\sigma\kappa o\upsilon} + \upsilon_{cm} = 2\upsilon_{cm}$ και $\boxed{\alpha = 2\alpha_{cm}}$

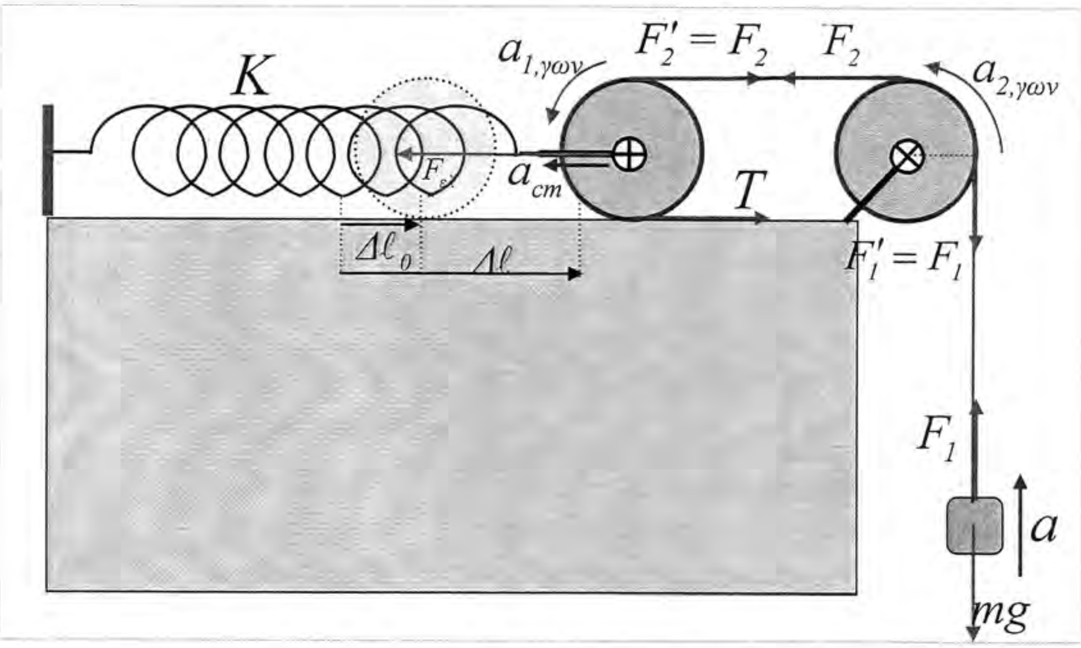
Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο Newton για κάθε σώμα...

Σώμα Σ: $\Sigma Fy = ma \Rightarrow F_1 - mg = ma \Rightarrow F_1 - mg = 2ma_{cm}$ (1)

Τροχαλία: $\Sigma\tau = Ia_{2,\gamma\omega\nu} \Rightarrow F_2R - F_1R = \frac{1}{1}M_2R^2\frac{a}{R} \Rightarrow F_2 - F_1 = \frac{1}{2}M_2.2a_{cm}$ (2)

Δίσκος: $\Sigma Fx = M_1a_{cm} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - F_2 - T = M_1a_{cm}$ (3) και

$\Sigma\tau = I_1a_{1,\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR - F_2R = \frac{1}{2}M_1R^2\frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow T - F_2 = \frac{1}{2}M_1a_{cm}$ (4)



(1) $\Rightarrow 2F_1 - 2mg = 4ma_{cm}$ (1')

(2) $\Rightarrow 2F_2 - 2F_1 = 2\frac{1}{2}M_2.2a_{cm}$ (2')

(3) $\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - F_2 - T = M_1a_{cm}$ (3')

(4) $\Rightarrow T - F_2 = \frac{1}{2}M_1a_{cm}$ (4')

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:
$F_{\varepsilon\lambda} - 2mg = (4m + 2M_2 + 1,5M_1)a_{cm} \Rightarrow$
$K\Delta\ell - 2mg = (4m + 2M_2 + 1,5M_1)a_{cm}$ και
με αντικατάσταση παίρνουμε
$\boxed{a_{cm} = 20\Delta\ell - 2,5}$ (S.I) (5)

Όταν το σώμα (Σ) κατέρχεται κατά $\Delta y = 0,35cm$ το ελατήριο επιμηκύνεται κατά $\Delta\ell' = \frac{\Delta y}{2} = 0,175m$ και η τελική παραμόρφωση είναι $\Delta\ell = (0,125 + 0,175)m$

$\Rightarrow \Delta\ell = (0,125 + 0,175)m \Rightarrow \boxed{\Delta\ell = 0,3m}$

Τελικά με αντικατάσταση στην (5) παίρνουμε $\boxed{a_{cm} = 3,5m/s^2}$ και $\boxed{a = 7m/s^2}$ $\boxed{a_{1,\gamma\omega\nu} = 35rad/s^2}$ $\boxed{a_{2,\gamma\omega\nu} = 70rad/s^2}$ Επίσης με απλές αντικαταστάσεις παίρνουμε, $F_1 = 42,5N$, $F_2 = 49,5N$, $T = 56,5N$.

$$\frac{dL_\delta}{dt} = \Sigma\tau = TR - F_2R \Rightarrow \boxed{\frac{dL_\delta}{dt} = 0{,}7Kgm^2/s^2}$$

Γ) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος υπάρχει στο τέλος της επιταχυνόμενης κίνησης, εκεί όπου $a = 0$ ή $a_{cm} = 20\Delta\ell'' - 2{,}5 = 0$ ή $\Delta\ell'' = 0{,}125m = \Delta\ell_0$. Μέχρι τότε κέντρο του δίσκου μετατοπίζεται κατά $\Delta\ell - \Delta\ell_0 = 0{,}3 - 0{,}125 = 0{,}175m$ και το σώμα κατά $H = 2(\Delta\ell - \Delta\ell_0) = 0{,}35m$.
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε από τότε που αφέθηκε ελεύθερο το σύστημα μέχρι την μέγιστη κινητική ενέργεια και έχουμε... $K_{max} - 0 = W_{\varepsilon\lambda} + W_{B,\Sigma} \Rightarrow$

$K_{max} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell^2 - \Delta\ell_0^2) - mgH$ ... $\boxed{K_{max} = 6{,}125J}$

Κινητική ενέργεια δίσκου: $K_1 = \frac{1}{2}M_1 \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}M_1\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M_1R^2\left(\frac{\upsilon_{cm}}{R}\right)^2 \Rightarrow$

$K_1 = \frac{3}{4}M_1\upsilon_{cm}^2$

Κινητική ενέργεια τροχαλίας: $K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}M_2R^2\left(\frac{2\upsilon_{cm}}{R}\right)^2 \Rightarrow K_2 = M_2\upsilon_{cm}^2$

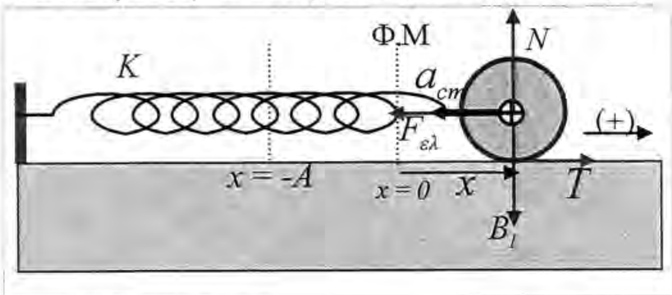
Κινητική ενέργεια σώματος : $K_3 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\left(2\upsilon_{cm}\right)^2 \Rightarrow K_3 = 2m\upsilon_{cm}^2$

Κινητική συστήματος: $K_{\sigma\upsilon\sigma} = \frac{3}{4}M_1\upsilon_{cm}^2 + M_2\upsilon_{cm}^2 + 2m\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow K_{\sigma\upsilon\sigma} = 10\upsilon_{cm}^2$ (S.I)

Η κινητική του δίσκου είναι $K_1 = \frac{3}{4}M_1\upsilon_{cm}^2 = 3\upsilon_{cm}^2$ και αποτελεί το $\pi = \frac{K_1}{K_{\sigma\upsilon\sigma}}100\%$ ή $\boxed{\pi = 30\%}$

Δ) Θα φθάσει εκεί όπου θα μηδενισθεί η ταχύτητα και το ελατήριο έστω ότι θα έχει παραμόρφωση $\Delta\ell_1$. Μέχρι τότε κέντρο του δίσκου μετατοπίζεται κατά $\Delta\ell - \Delta\ell_1$ και το σώμα κατά $H = 2(\Delta\ell - \Delta\ell_1)$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε από τότε που αφέθηκε ελεύθερο το σύστημα μέχρι το μηδενισμό της ταχύτητας $0 - 0 = W_{\varepsilon\lambda} + W_{B,\Sigma} \Rightarrow$ $0 = \frac{1}{2}K(\Delta\ell^2 - \Delta\ell_1^2) - mg(\Delta\ell - \Delta\ell_1)$ ... $\Delta\ell_1 = 0{,}3m$ (αρχική κατάσταση... απορρίπτεται) και $\boxed{\Delta\ell_1 = -0{,}05m}$ (Ελατήριο συσπειρωμένο).

Ε) Θεωρούμε τον δίσκο σε τυχαία θετική θέση. Η θέση του άξονα περιστροφής είναι εκεί όπου $\Sigma F = 0 \Rightarrow F\varepsilon\lambda = 0$ δηλαδή στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.



$\Sigma F_x = M_1a_{cm} \Rightarrow T - F_{\varepsilon\lambda} = M_1a_{cm}$
$\Rightarrow T - Kx = M_1a_{cm}$ (1)

$\Sigma\tau = I_1a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -TR = \frac{1}{2}M_1R^2\frac{a_{cm}}{R}$

$\Rightarrow -T = \frac{1}{2}M_1 a_{cm}$ (2) . Από (1) και (2) με πρόσθεση παίρνουμε $a_{cm} = -\frac{2K}{3M_1}x$...

$\Sigma F_x = M_1\left(-\frac{2K}{3M_1}x\right) \Rightarrow \boxed{\Sigma F_x = -\frac{2K}{3}x}$. Άρα ο άξονας περιστροφής του δίσκου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά $D = \frac{2K}{3} \Rightarrow D = \frac{800}{3}N/m$, κυκλική συχνότητα $D = M_1\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{800}{3}}rad/s$, πλάτος $A = 0,05m$ και αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}rad$, αφού την $t = 0$ ο ταλαντωτής είναι στη θέση $x = -A$. Η εξίσωση απομάκρυνσης του άξονα περιστροφής είναι...

$$\boxed{x = 0,05\eta\mu\left(\sqrt{\frac{800}{3}}t + \frac{3\pi}{2}\right)(S.I)}$$